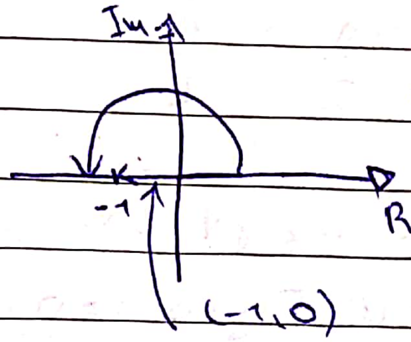
5/3/21

Παραδ. 1.3.6 (παραλλαγή) Βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $z^3 = -1$:

Λύση: Οι ρίζες είναι $z_k = \sqrt[3]{-1}\, e^{i\frac{2k\pi}{3}}$, $k=0,1,2$

[$n=3 \Rightarrow n-1=2$] όπου: $\sqrt[3]{-1} = \underbrace{\sqrt[3]{|-1|}}_{=1}\, e^{i\frac{Arg(-1)}{3}} = e^{i\pi/3}$



$\varphi = Arg(-1) = \pi \in (-\pi,\pi]$

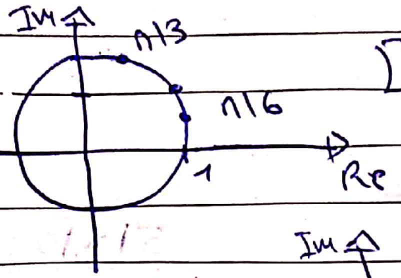
$\Rightarrow z_0 = \sqrt[3]{-1} = e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} e^{i\frac{2\pi}{3}} = -1$

$z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}} e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{i\frac{5\pi}{3}} \cdot e^{i(-2\pi)} =$
$= e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Να προσεχθεί ότι, βάσει ορισμού ως τιμή της συνάρτησης της 3-ρίζας $z \mapsto \sqrt[3]{z} \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$, βρήκαμε $\sqrt[3]{-1} = e^{i\frac{\pi}{3}} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

Ενώ στα πλαίσια της Άλγεβρας εντός του $\mathbb{R}$, ενίοτε λέγαμε (π.χ. στο Σχολείο) ότι $\sqrt[3]{-1} = -1$
Αυτό προέκυπτε κατά σύμβαση [κανονικά πραγματικές ρίζες ορίζονται για θετικούς πραγματικούς (και το μηδέν επίσης)] επειδή όπως είδαμε το $z_1 = -1$, είναι η μόνη πραγματική ρίζα της εξ. $z^3 = -1$

Είπαμε $z_0 = e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_1 = e^{i\pi} = -1$, $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}} = \bar{z_0}$



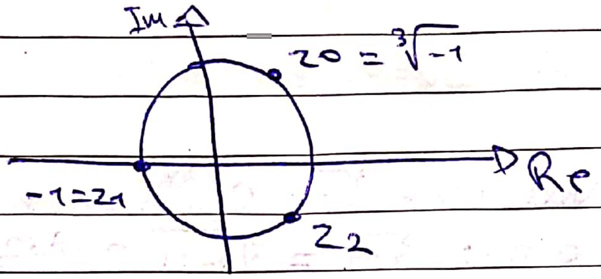
Κανόνας μνημόνευσης: $\sin 0 = \frac{\sqrt{0}}{2}$

$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{1}}{2}$

$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{4}}{2}$



Θέλουμε τώρα να βρούμε για δοσμένο $w \in \mathbb{C}^*$ όλες τις (διαφορετικές) λύσεις $z \in \mathbb{C}$ της $e^z = w$. [για $w = 0$ $\nexists$ τέτοια $z \in \mathbb{C}$, αφού $|e^z| = |e^{x+yi}| = |e^x \cdot e^{iy}| = e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$ και $w = |w| e^{i\operatorname{Arg} w} \in \mathbb{C}^*$
Έχουμε:

$e^z = w \Leftrightarrow e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = |w| e^{i\operatorname{Arg} w} \Rightarrow$ [παίρνοντας απόλυτες τιμές] $e^x = |w|$ [και μετά απαλοίφοντας]

$e^{iy} = e^{i\operatorname{Arg} w} \Rightarrow [y, \operatorname{Arg} w \in \mathbb{R}]$ $y = \operatorname{Arg} w + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow z_k = x + iy = \ln\underbrace{|w|}_{>0} + i(\operatorname{Arg} w + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

Είναι οι άπειρες (αριθμήσιμα) διαφορετικές λύσεις της $e^z = w$ και άλλες δεν υπάρχουν

[αφού $e^{z_k} = e^{\ln|w|} e^{i(\operatorname{Arg} w + 2k\pi)} = |w| e^{i\operatorname{Arg} w} = w$]

Παρατήρηση: Η $\log : \mathbb{C}^* \to \{ w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w \in (-\pi, \pi] \} \subset \mathbb{C}$ είναι 1-1 και επί και είναι η αντίστροφη του περιορισμού της $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ στο $\{ w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w \in (-\pi, \pi] \}$

Για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ (σταθ.) ορίζεται η:
$z \mapsto z^\lambda := e^{\lambda \log z}$, $z \in \mathbb{C}^*$, με ειδικές περιπτώσεις τις z^n, $n = \lambda \in \mathbb{Z}$ και $\sqrt[n]{z}$, $\lambda = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$

[Άρα είναι συμβατή με αυτές, Άσκηση βλ. Σημ.]

Παράδειγμα: $i^i = e^{i \log i} = e^{(i \underbrace{\ln |i|}_{=0} + i \underbrace{\operatorname{Arg} i}_{=\pi/2})}$ =

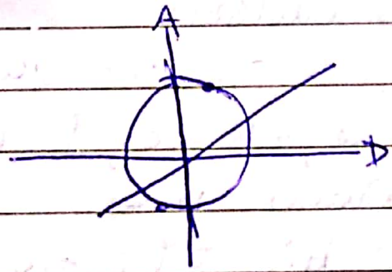
$= e^{i(i\frac{\pi}{2})} = e^{-\frac{\pi}{2}} \in \mathbb{R}$

Παράδειγμα: Βρείτε τα $z \in \mathbb{C}$ με $e^z = -1 - i\sqrt{3}$

Λύση:

$-1 - i\sqrt{3} = \underbrace{|-1 - i\sqrt{3}|}_{= (1^2 + \sqrt{3}^2)^{1/2} = 2} e^{i \operatorname{Arg}(-1 - i\sqrt{3})}$

$\Rightarrow e^{i \operatorname{Arg}(-1 - i\sqrt{3})} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ($\frac{1}{2} = \cos\varphi$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\varphi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$)



$\Rightarrow \operatorname{Arg}(-1 - i\sqrt{3}) = -\frac{2\pi}{3}$

$= -\cos\frac{\pi}{3} - i \sin\frac{\pi}{3} =$

$= e^{i\pi} e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

$\Rightarrow e^z = 2 e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} \Rightarrow z_k = \ln 2 + i\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow z_0 = \log(-1 - \sqrt{3} i) = \ln 2 + i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

A23: Βρείτε για δεδομένο $w \in \mathbb{C}^*$ τις λύσεις της εξίσωσης
$(-1)^z = w = e^{z\log(-1)}$

Λύση:

$(-1)^z = w = e^{z\log(-1)} = e^{z(\ln|-1| + i\operatorname{Arg}(-1))} =$

$= e^{\underbrace{zi\pi}_{=\zeta}} \Rightarrow \zeta = \log w + i2k\pi, \ k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow z = \dfrac{\log w}{i\pi} + 2k, \ k \in \mathbb{Z}$

Κεφ 2 | Τοπολογία του $\mathbb{C}$ = Τοπολογία του $\mathbb{R}^2$

με $z = x+iy$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $|z| = \|(x,y)\|$

Ακολουθία στο $\mathbb{C}$ = Ακολουθία στον $\mathbb{R}^2$

$(z_n)\subset\mathbb{C}$ με $z_n = x_n + iy_n$, $n\in\mathbb{N}$, $(x_n,y_n)\in\mathbb{R}^2$

$z_n \to z\in\mathbb{C} :\Leftrightarrow \underbrace{|z_n - z|}_{\in[0,\infty)\subset\mathbb{R}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Leftrightarrow (x_n,y_n)\to(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ όπου $z_0 = x_0+iy_0$

Ισχύουν -προφανώς- όλες οι ιδιότητες των συγκλινουσών ακολουθιών στον $\mathbb{R}^2$

Επιπλέον υπάρχουν ιδιότητες οι οποίες προκύπτουν από την έννοια του πολλαπλασιασμού στον $\mathbb{C}$ [που δεν ορίζεται στον $\mathbb{R}^2$] με βασικότερες: $z_n \to z$, $w_n \to w$ $\Rightarrow z_n\cdot w_n \to z\cdot w$, και αν $w\neq 0$, $\dfrac{z_n}{w_n} \to \dfrac{z}{w}$

[απόδειξη ουσιαστικά όπως στον Απειρ.]

Χρησιμοποιούμε ως γνωστά τα όρια:
$a^n \to 0$ για $a\in(-1,1)\subset\mathbb{R}$, $\sqrt[n]{a} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ για $a>0$,

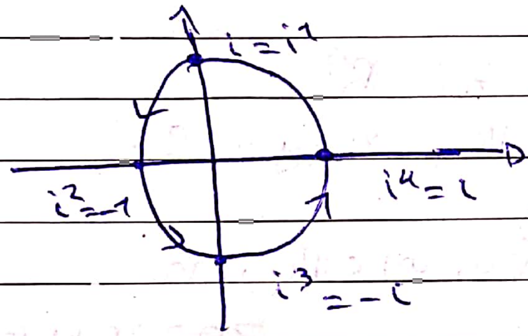
$\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Παράδειγμα: Εξετάστε αν συγκλίνει στο $\mathbb{C}$ (δηλ. αν έχει όριο $\in \mathbb{C}$) η $(i^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$

Παρατηρούμε $i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i, \dots$

$$\Rightarrow i^n = \begin{cases} 1, & n=4k \\ i, & n=4k+1 \\ -1, & n=4k+2 \\ -i, & n=4k+3 \end{cases}, \quad k\in\mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ η i^n δεν συγκλίνει στο $\mathbb{C}$ [π.χ. $(-1)^n$ στον ΑΠΕΙΤ]



Καινούργιο στοιχείο στο $\mathbb{C}$: $z_n \to \infty :\Leftrightarrow |z_n| \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$, $|z_n| \in [0,\infty) \subset \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty \Leftrightarrow \forall r>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0 : |z_n| > r$

και λέμε ότι η $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ τείνει (ή συγκλίνει) στο άπειρο

Ασκήσεις μέχρι 18.3.2021 μελέτη και ασκήσεις έως και §2.2 Σημ.